XIII Konferencja Diagnostyki Edukacyjnej
Uczenie się i egzamin w oczach uczniów.
Łomża, 5 - 7.10.2007

Ewa Stożek
Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łodzi

Prognostyczna funkcja zadania matematycznego?

O naturze zadania rozrywającego

Na XII KDE przedstawiliśmy przykłady zadań rozrywających w testach po szóstej klasie szkoły podstawowej oraz na maturze z matematyki [1,2]. Zadanie rozrywające w teście dzieli populację zdających na dwie grupy o znacząco różnych **wynikach za cały test**, co przejawia się w dwumodalności rozkładu wyników. Usunięcie tego zadania z testu powoduje, że rozkład wyników jest jednomodalny i zbliżony do normalnego. Nazwaliśmy te zadania rozrywającymi ze względu na skojarzenia pochodzące z biologii – tam analogiczne działanie pewnego czynnika selekcyjnego w populacji nazywa się doborem rozrywającym. Zadania rozrywające to zadania dobrze różnicujące, ale nie każde zadanie o dużej mocy różnicującej jest zadaniem rozrywającym. Zadanie rozrywające może być dla całej populacji łatwe lub trudne, ważniejsze jest jednak to, że jest ono łatwe i bardzo łatwe dla dużej grupy uczniów, natomiast dla innej liczebnie znaczącej grupy jest trudne i bardzo trudne (efektem tego jest U-kształtny rozkład **wyników za zadanie**). Charakterystycznymi parametrami zadania rozrywającego są wartości współczynników w równaniu krzywej charakterystycznej zadania: współczynnika a określającego kąt nachylenia stycznej w punkcie przegięcia (czyli określającego „stromość” krzywej charakterystycznej) oraz współczynnika b określającego położenie punktu przegięcia (czyli pośrednio określającego wielkości grup, dla których zadanie jest łatwe lub trudne). We wszystkich obserwowanych przez nas przypadkach $a \geq 1$ w testach maturalnych i $a \geq 1{,}5$ w testach po szkole podstawowej i gimnazjalnych, natomiast współczynnik b przyjmował wartości od 0,1 do 0,7.

Przedstawiony przez nas materiał wywołał wiele dyskusji. Niektórzy uważali, że efekt rozrywający jest związany ze złą konstrukcją zadania (np. rozciągniętą skalą w schemacie punktowania w sytuacji, kiedy w rzeczywistości zadanie ma charakter zerojedynkowy). Dzisiaj, po analizie zadań tego typu w innych testach [3] uważamy, że jednak w większości przypadków nie długość skali (por. zad.15B w [3]), ani błędy konstrukcyjne decydują o charakterze tych zadań. Jesteśmy zdania, że zadania rozrywające dzielą populację ze względu na pewną ważną cechę – umiejętność operacjonalizowania wiedzy – „**WIEM I POTRAFIĘ”**. W tych zadaniach bardzo ważnym czynnikiem jest element wiedzowy (uczeń wie – np. zna wzór na pole trapezu, zna twierdzenie Pitagorasa, zna daty wydarzeń związanych z Rewolucją Francuską), ale jednocześnie nie mniej ważna jest umiejętność interpretacji zadania, zastosowania tej wiedzy.

W tym kontekście zrozumiałe jest, że na sprawdzianie zadaniem rozrywającym najczęściej jest tekstowe zadanie matematyczne, z elementami geometrii.

Na podstawie analizy wyników uczniów, którzy w 2004 rozwiązywali na sprawdzianie zadania z testu „Chleb”, a w 2007 przystąpili do egzaminu gimnazjalnego w części matematyczno-przyrodniczej spróbujemy odpowiedzieć na następujące pytania:

Czy zadanie rozrywające można traktować jako zadanie prognostyczne?
Czy i jak zróżnicowanie generowane przez zadanie rozrywające zmienia się na kolejnym etapie kształcenia?

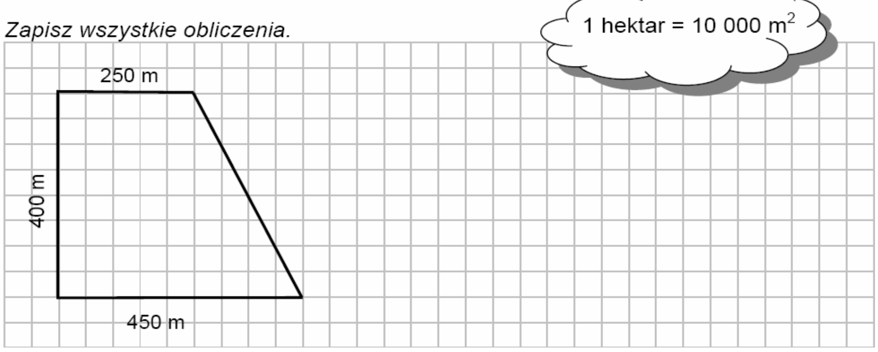
Analizy zostały przeprowadzone na scalonych danych z OKE Łódź dla 47 153 uczniów, co stanowi prawie 95% wszystkich przystępujących do egzaminu gimnazjalnego w 2007 roku i 94% wszystkich przystępujących do sprawdzianu w 2004 roku. Stąd mogą wynikać niewielkie różnice z publikowanymi w innych opracowaniach parametrami omawianych tu zadań, które były wyliczane dla całej populacji.

Zadanie rozrywające w teście „Chleb” – sprawdzian 2004

Przypomnijmy zadanie 24. – sprawdzian 2004.

24. Działka ma kształt i wymiary podane na rysunku. Rolnik posiał na tej działce pszenicę. Z każdego hektara zebrał 4,5 tony pszenicy. Ile ton pszenicy zebrał z całej działki?

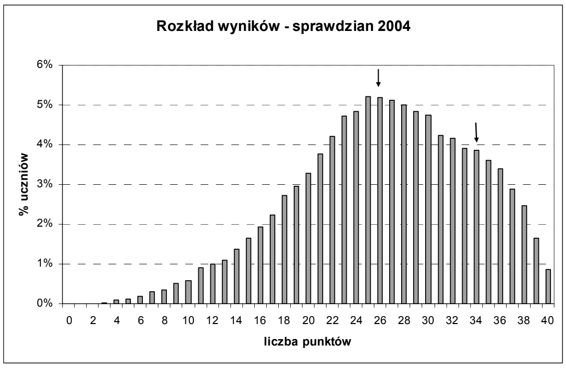
Zapisz wszystkie obliczenia.



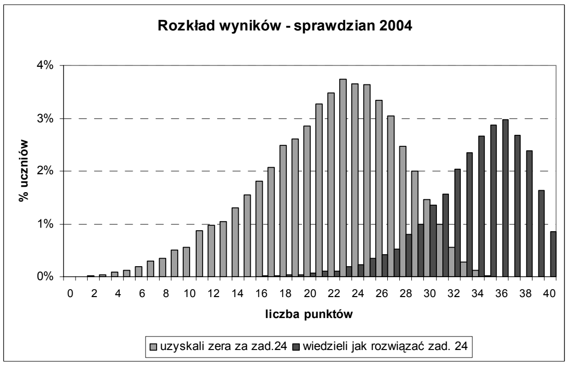
Jak pokazaliśmy, w [1] zadanie to ma charakter rozrywający (charakterystyczne cechy tego zadania przypominamy na rys. 2.). Za zadanie 24. uczeń mógł maksymalnie uzyskać 5 punktów, z czego 2 punkty za metodę (sposób rozumowania prowadzący do poprawnego rozwiązania), a 3 punkty za poprawnie wykonane obliczenia.

W rozkładzie wyników daje się wyodrębnić dwie mody: 25 i 35 punktów (rys. 1a). Taki podział generuje „rozwiązywalność" zadania 24. (rys. 1b). Uczniowie, którzy „wiedzieli jak rozwiązać zad. 24." to uczniowie, którzy uzyskali za to zadanie co najmniej 2 punkty za metodę (to jest za kryterium 24.I oraz 24.III).

a.



b.



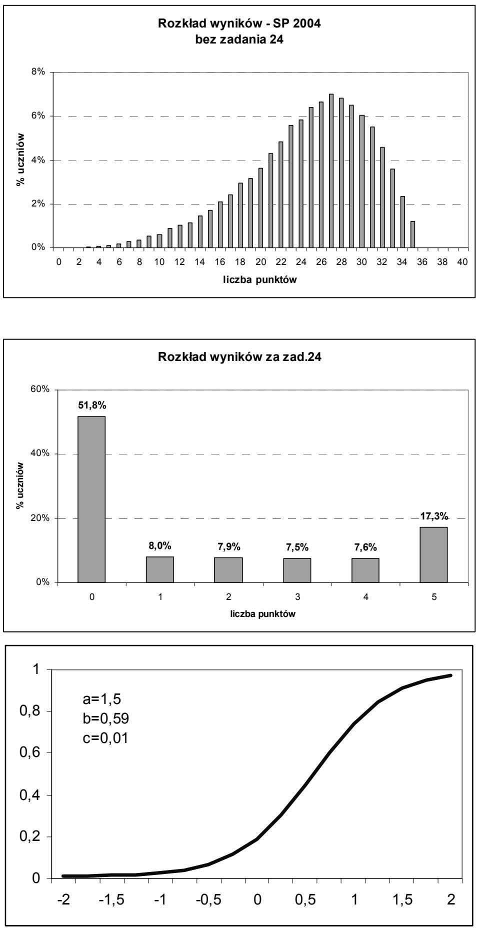
Rys. 1. Rozkład wyników na sprawdzianie 2004 (a), z uwzględnieniem „rozwiązywalności" zadania 24.(b) OKE Łódź, N = 47 153.

Analiza wzorców odpowiedzi do tego zadania pokazuje, że:

– 51,84% uczniów uzyskało 0 punktów
– 34% znało i zastosowało wzór na pole trapezu (dokładniej: wiedziało, jak obliczyć pole działki, być może stosując inną metodę)
– 27% wiedziało, jak rozwiązać zadanie, stracili punkty tylko za błędne obliczenia

– 17,3% uczniów uzyskało maksymalną liczbę punktów.

Podstawową trudnością dla uczniów w zadaniu było obliczenie pola działki w kształcie trapezu. Tak było zapewne dla wszystkich tych, którzy nie uzyskali punktów za to zadanie. Ciekawszym wydaje się jednak fakt, że nie wszyscy spośród tych, którzy zastosowali wzór na pole trapezu (34%) miało plan rozwiązania zadania (tych było tylko 27%). Być może niektórzy policzyli pole trapezu zasugerowani danymi na rysunku, ale nie mieli pomysłu na wykonanie kolejnego kroku w rozwiązaniu. Zatem nie wystarczyło „znać”, należało jeszcze rozumieć zadanie tekstowe w stopniu pozwalającym na zastosowanie tej wiedzy.



zbliżony do normalnego rozkład wyników za cały test bez zad. 24.

U-kształtny rozkład wyników za zadanie 24.

parametry krzywej charakterystycznej

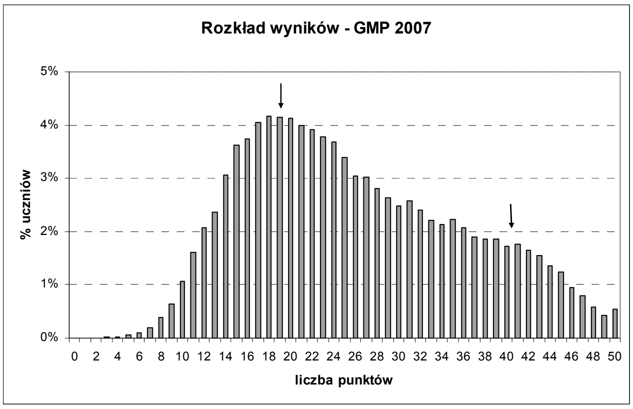
Rys. 2. Cechy charakterystyczne zadania 24. jako zadania rozrywającego

Zadanie 24. zadaniem prognostycznym dla testu GMP 2007?

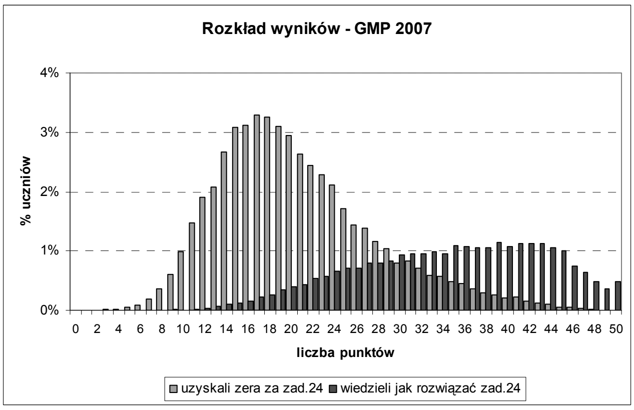
Popatrzmy teraz na tegoroczne wyniki egzaminu gimnazjalnego w części matematyczno-przyrodniczej (rys. 3). Rozkład wyników jest dwumodalny, z modami odpowiednio 18 i 41 punktów (rys. 3a). Jak z testem GMP 2007 poradzili sobie uczniowie ze względu na „rozwiązywalność" zadania 24. na sprawdzianie? Okazuje się, że moda w wynikach uczniów, którzy uzyskali zera za zadanie 24. odpowiada niższej wartości dominanty w rozkładzie wyników, a moda wyników za test dla uczniów, którzy umieli rozwiązać zadanie 24. odpowiada wyższej dominancie rozkładu wyników (rys. 3b). Uczniowie, którzy poradzili sobie z zadaniem 24. na sprawdzianie uzyskiwali zdecydowanie wyższe wyniki na egzaminie gimnazjalnym niż ci, którym zadanie 24. sprawiło kłopot. W tym sensie zadanie 24. jest zadaniem prognostycznym dla egzaminu gimnazjalnego w części matematyczno-przyrodniczej. Nie ma w tym nic dziwnego: to zadanie jest w takim stopniu zadaniem prognostycznym, w jakim **sprawdzian jest prognostyczny w stosunku do egzaminu gimnazjalnego**. Wiadomo bowiem, że korelacja między wynikiem na sprawdzianie a wynikiem na egzaminie gimnazjalnym wynosi około 0,7 (we wszystkich trzech edycjach egzaminów, z których dysponujemy scalonymi danymi, tj. 2002-2005, 2003-2006, 2004-2007). Jeśli jednak w przypadku sprawdzianu, badającego wiele umiejętności uczniowskich jest to intuicyjnie zrozumiałe, to w przypadku pojedynczego zadania matematycznego jest to zaskakujące. Korelacja tego pięciopunktowego zadania z wynikiem ogólnym egzaminu gimnazjalnego w części matematyczno-przyrodniczej wynosi 0,62.

M. Dąbrowski [4, s.126-127], powołując się na badania międzynarodowe, podkreśla, że „jedną z zasadniczych cech różniących dzieci, które odnoszą sukcesy, ucząc się matematyki od tych, które mają z nią kłopoty, jest sposób podejścia do 'matematycznej materii' pojawiającej się w procesie kształcenia. Ci pierwsi uczniowie spontanicznie poszukują związków i zależności, zestawiają nowe obiekty i sytuacje z wcześniejszymi (...) Widzą i rozumieją, że różne rzeczy się ze sobą wiążą i są sobie wzajemnie 'potrzebne'. Ci drudzy – każdy obiekt, działanie, zjawisko, sytuację traktują odrębnie i w izolacji od innych. Zawsze więc uczą się 'od nowa'. Ich matematyka składa się z odrębnych, nie związanych ze sobą cegiełek(...)". Naszym zdaniem zadanie rozrywające różnicuje uczniów właśnie ze względu na tę zasadniczą cechę – gotowość do uczenia się matematyki, która przekłada się na umiejętność operacjonalizowania wiedzy. Należy zatem oczekiwać, że uformowane na wcześniejszych etapach kształcenia podejście do „matematycznej materii" będzie się przenosić na wyższe etapy kształcenia. Zdają się to potwierdzać wyniki uczniów w zadaniu rozrywającym dla testu GMP 2007 (zad. 33.).

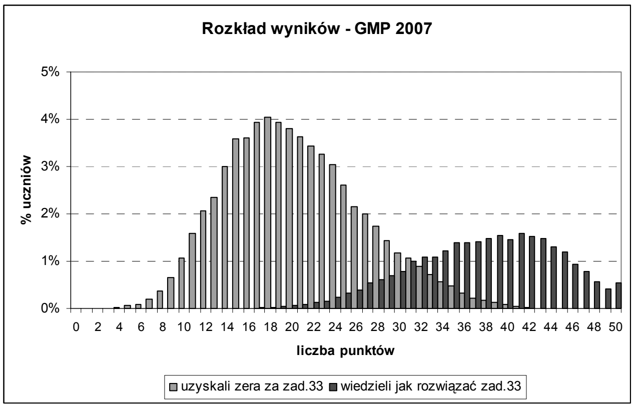
a.



b.



c.



Rys. 3. Rozkłady wyników GMP(a) z uwzględnieniem „rozwiązywalności” zad. 24. na sprawdzianie 2004(b) oraz zad. 33. na egzaminie gimnazjalnym 2007(c). OKE Łódź, N = 47 153

Zadanie rozrywające w teście GMP 2007

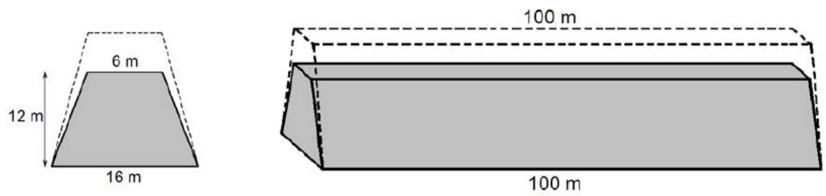
Zadaniem rozrywającym dla testu GMP 2007 jest zadanie 33.

Mimo że zadania 32. i 33. stanowią wiązkę zadań i należałoby się spodziewać, że ich rola w teście powinna być podobna, to tak nie jest. Zadanie 32. jest trudniejsze (łatwość 0,23) od zadania 33. (łatwość 0,3), a jego moc różnicująca jest nieco mniejsza niż zadania 33. Zadanie 32. jest za trudne na to, by być zadaniem rozrywającym: duża grupa uczniów (50%) nie uzyskała punktów za to zadanie, a tylko bardzo niewielka grupa rozwiązała je poprawnie (niecałe 5%). Natomiast w przypadku zadania 33. grupa uczniów, którzy rozwiązali poprawnie zadanie, jest zdecydowanie większa (24,5%). Zadanie 33. ma U-kształtny rozkład tak charakterystyczny dla zadań rozrywających (rys. 4.).

Zadanie 33. mocno różnicuje populację: korelacja jego poszczególnych jednopunktowych czynności z wynikiem ogólnym GMP wynosi odpowiednio 0,72; 0,73; 0,74; 0,71, a moc różnicująca całego zadania – 0,77.

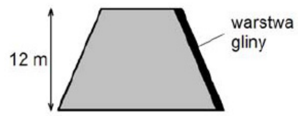
Przypomnijmy treść zadań 32. i 33.

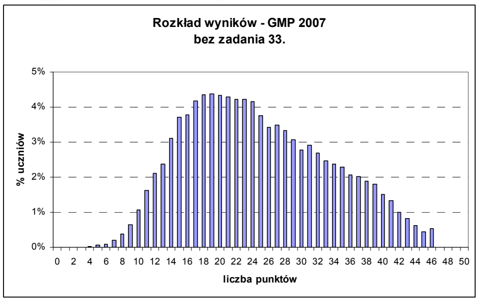
Informacje do zadań 32. i 33.
Przekrój poprzeczny ziemnego wału przeciwpowodziowego ma mieć kształt równoramiennego trapezu o podstawach długości 6 m i 16 m oraz wysokości 12 m. Trzeba jednak usypać wyższy wał, bo przez dwa lata ziemia osiądzie i wysokość wału zmniejszy się o 20% (szerokość wału u podnóża i na szczycie nie zmienia się).



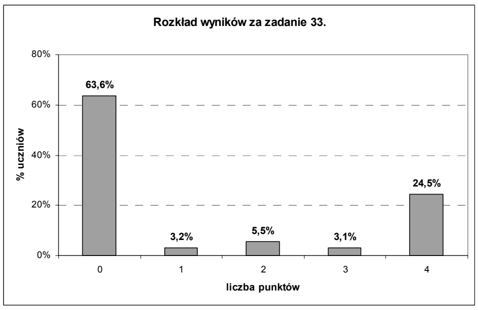
Zadanie 32. (0-4)
Oblicz, ile metrów sześciennych ziemi trzeba przywieźć na usypanie 100-metrowego odcinka ziemnego wału przeciwpowodziowego (w kształcie graniastosłupa prostego) opisanego w informacjach. Zapisz obliczenia.

Zadanie 33. (0-4)
Po zakończeniu osiadania ziemi, w celu zmniejszenia przesiąkania, na zboczu wału od strony wody zostanie ułożona warstwa gliny. Oblicz pole powierzchni, którą trzeba będzie wyłożyć gliną na 100-metrowym odcinku tego wału (wał ma kształt graniastosłupa prostego). Zapisz obliczenia. Wynik podaj z jednostką.

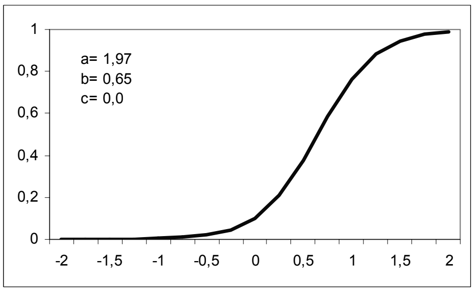




Zbliżony do normalnego rozkład wyników za cały test bez zad. 33.



U-kształtny rozkład wyników za zadanie 33.



Parametry krzywej charakterystycznej

Rys. 4. Cechy charakterystyczne zadania 33. jako zadania rozrywającego

Za zadanie 33. uczeń mógł uzyskać 4 punkty, z czego 3 punkty za metodę (sposób rozumowania prowadzący do poprawnego rozwiązania) i jeden punkt za poprawne obliczenia. Kluczem do rozwiązania zadania była znajomość twierdzenia Pitagorasa (lub własności trójkąta pitagorejskiego) oraz poprawna interpretacja zadania tekstowego.

Analiza wzorców odpowiedzi do zadania 33. pokazuje, że:

- 63,6% uczniów uzyskało zero punktów,
- 31,5% znało twierdzenie Pitagorasa (lub w inny sposób potrafiło wyliczyć ramię trapezu),
- 26,1% miało plan rozwiązania (otrzymało 3 punkty za metodę),
- 24,5% uzyskało za zadanie maksymalną liczbę punktów.

W tym przypadku obserwujemy większą bezradność uczniów wobec zadania - prawie 64% uczniów nie uzyskało punktów za to zadanie. Wśród tych, którzy zobaczyli jak można w zadaniu wykorzystać twierdzenie Pitagorasa, podobnie jak w przypadku zad. 24., znalazła się spora grupa uczniów, którzy nie potrafili wykonać kolejnego kroku w rozwiązaniu (nie mieli planu rozwiązania zadania), jednak większość z nich doprowadziła rozwiązanie zadania do końca.

Podział populacji, generowany przez zadanie 33. odpowiada (rys. 3c) zarówno dwumodalnemu rozkładowi wyników GMP 2007 (rys. 3a), jak i podziałowi populacji generowanemu przez zadanie 24. (rys. 3b). Czy to oznacza, że te populacje pokrywają się?

Spośród 24 410 osób, które za zadanie 24. na sprawdzianie 2004 otrzymały zero punktów, 20 276 osób **(83%!)** otrzymało zero za zadanie 33. na egzaminie GMP 2007. Zatem nastąpiło odtworzenie tej populacji – trzyletnia nauka w gimnazjum nie zapobiegła pewnej bezradności matematycznej, która cechowała tych uczniów na sprawdzianie. Natomiast populacja uczniów, którzy wiedzieli, jak rozwiązać zadanie 24. **rozwarstwiła się**: spośród 12 842 osób, które umiały rozwiązać zadanie 24., 7 359 (57,3%) uczniów poradziło sobie również z zadaniem 33., natomiast 4 063 uczniów (31,6%) otrzymało za zadanie 33. zero punktów.

Wnioski

1. Zadanie matematyczne, rozrywające, na sprawdzianie jest zadaniem prognostycznym dla wyniku na egzaminie gimnazjalnym w części matematyczno-przyrodniczej w podobnym stopniu, jak wynik sprawdzianu jest prognostyczny dla wyniku na egzaminie gimnazjalnym.
2. Zadanie matematyczne, rozrywające, jest zadaniem prognostycznym także i w negatywnym sensie – niska „wykonalność” zadania rozrywającego z dużym prawdopodobieństwem oznacza niską „wykonalność” zadań matematycznych na egzaminie gimnazjalnym (w rozważanym przez nas przykładzie nastąpiło 83% odtworzenie populacji). Natomiast dobre wyniki (mierzone zadaniem sprawdzianowym) nie gwarantują tego, że uczeń poradzi sobie z zadaniami matematycznymi na egzaminie gimnazjalnym (57% odtworzenie populacji).

3. Zróżnicowanie ze względu na cechę generowaną zadaniami rozrywającymi utrwala się (a nawet zwiększa) na kolejnym etapie kształcenia. Naszym zdaniem cechą tą jest umiejętność operacjonalizowania wiedzy: **WIEM i POTRAFIĘ**.

Na zakończenie

Uczniowie, osiągnięcia których tutaj opisaliśmy, w 2010 roku jako pierwsi absolwenci trzyletnich szkół ponadgimnazjalnych przystąpią do obowiązkowego powszechnego egzaminu maturalnego z matematyki. Dużo już o tych uczniach **WIEMY**, ale czy **POTRAFIMY** wykorzystać tę wiedzę, np. do konstrukcji arkuszy egzaminacyjnych z matematyki na rok 2010?

Bibliografia:

1. Stożek E., *Zadania „rozrywające" w testach na przykładzie sprawdzianu ze szkoły podstawowej.* „O wyższą jakość egzaminów szkolnych", cz.I Etyka egzaminacyjna i zagadnienia ogólne pod. red. B. Niemierki i M.K. Szmigel, XII Krajowa Konferencja Diagnostyki Edukacyjnej, Lublin, 9-11 X 2006, s.149-155.
2. Stożek E., Dąbrowski H., *Zadania „rozrywające" w testach na przykładzie zadań maturalnych z matematyki.* „O wyższą jakość egzaminów szkolnych", cz.I Etyka egzaminacyjna i zagadnienia ogólne pod. red. B. Niemierki i M.K. Szmigel, XII Krajowa Konferencja Diagnostyki Edukacyjnej, Lublin, 9-11 X 2006, s.156-162.
3. Jurek K., *Zadania „rozrywające" na egzaminie maturalnym z historii.* W materiałach XIII Konferencji Diagnostyki Edukacyjnej, Łomża 5-7 X 2007.
4. Dąbrowski M., Pozwólmy dzieciom myśleć. O umiejętnościach matematycznych trzecioklasistów. Centralna Komisja Egzaminacyjna, Warszawa 2007.